EXTENCIONES DE LOS MODELOS ARCH Y GARCH

Dr. Luis Miguel Galindo

"The gods love the obscure and hate the obvious"
Brihadaranyaka Upanishad

"When I say a Word, it is supposed to mean exactly what I want it to mean, nothing more, nothing less"

Alicia en el país de las maravillas

INTRODUCCIÓN:

"I have heard it said that too much academic research is focused on finding very precise answers to irrelevant questions"

Carol Alexander (2001)

1. ARCH(ρ):

(1)
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_\rho e_{t-\rho}^2$$

$$\alpha_0 \rangle 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho \geq 0$$

$$e_t / I_t \sim N\left(0, \sigma_t^2\right)$$

MODELOS APLICADOS:

2. GARCH(ρ,q):

(5)
$$\sigma_t^2 = w + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i e_{t-i}^2$$

MODELOS GENERALES:

El GARCH es estacionario:

$$\sum_{i=1}^{\rho} \beta_i + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \langle 1$$

1. GARCH(1,1):

(4)
$$\sigma_t^2 = w + \alpha e_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

La varianza condicional es función de:

- Constante
- Noticias sobre la volatilidad del periodo previo

$$\text{ARCH} : e_{t-1}^2$$

- La varianza pronosticado del periodo anterior:

$$\text{GARCH} : \sigma_{t-1}^2$$

3. GARCH-M:

(6.1)
$$y_t = x_t^{'}\theta + \chi \log\left(\sigma_t^2\right) + e_t$$

4. Regresores en la ecuación de varianza:

(6.2)
$$\sigma_t^2 = w + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i e_{t-i}^2 + z_t^{'}\pi$$

4. Integrated GARCH : IGARCH

Con

$$\sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$$

La varianza incondicional es infinita

IGARCH:

Con $\alpha + \beta = 1$ y suponiendo que $\beta = \dot{\chi}$

(7)
$$\sigma_t^2 = w + (1 - \chi)e_{t-1}^2 + \chi\sigma_{t-1}^2$$
$$0 \leq \chi \leq 1$$

Tipo de cambio: media y varianza no estacionaria
Con w = 0 $\Rightarrow$ IGARCH similar a EWMA

EXTENCIONES DEL GARCH

La varianza condicional (σ_t^2) de e_t debe ser no negativa

Imponiendo restricciones en los coeficientes se obtiene que las variables e_{t-i}^2 y σ_t^2 sean positivas

Alternativas:

- ABSGARCH
- EGARCH

EXTENCIONES DEL GARCH

Opción: Estimar el GARCH normal incluyendo e_{t-1}^{+} ó e_{t-1}^{-} pero no ambos

5. ABSGARCH

El modelo absoluto GARCH utiliza $|e_t|$

GARCH(ρ,q):

$$(1) \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_1 \, | e_{t-i} | + \sum_{j=1}^{\rho} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Al remplazar $|e_{t-i}|$ por e_{t-1}^2 entonces los errores muy grandes disminuyen su importancia

EXTENCIONES DEL GARCH: TARCH

Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) (GJR) desarrollan un modelo que permite asimetrías

6. Modelo GJR ó TARCH:

(1) $$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2 + \gamma e_{t-1}^2 \Gamma_{t-1}$$

Donde: $\Gamma_{t-1} = 1$ si $e_{t-1} < 0$

$= 0$ en otro caso

EXTENCIONES DEL GARCH: TARCH

En el caso donde exista “leverage effect” (existe mas volatilidad con caídas de precios) $\gamma > 0$

Con γ distinto de 0 existe asimetría.

Condición de no negatividad:

$$\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 0, \alpha_1 + \gamma \geq 0$$

MODELOS GENERALES:

<u>GJR-GARCH: </u>(Glosten, Jagannathan Runkle, 1993):

(1)
$$h_t = w + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i h_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} \left(\alpha_j e_{t-j}^2 + \delta_t D_{jt-1} e_{t-j}^2 \right)$$

$$D_{t-1} = \begin{cases} 1 \ \text{si} \ \ e_{t-1} \langle 0 \\ 0 \ \text{si} \ \ e_{t-1} \geq 0 \end{cases}$$

MODELOS APLICADOS:

TARCH

(1)
$$\sigma_t^2 = w + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^{\gamma} \gamma_k e_{t-k}^2 I_{t-k}$$

$$I_t^- = 1 \quad \text{si} \quad e_t \langle 0 \quad y \quad 0 \quad \text{en} \quad \text{otro} \quad \text{caso}$$

Con γ1>0 malas noticias incrementan la volatilidad (leverage effect)

EXTENCIONES DEL GARCH

TGARCH:

Threshold GARCH:

(1) $$\sigma_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^+ e_{t+1}^+ + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^- e_{t-i}^- + \sum_{j=1}^{\rho} \beta_j \sigma_{t-j}$$

1. $e_{t-1}^+ = e_{t-1}$ para $e_{t-1} > 0$
   o para $e_{t-1} > 0$

2. $e_{t-1}^- = e_{t-1}$ para $e_{t-1} < 0$
   o para $e_{t-1} \geq 0$

EXTENCIONES DEL GARCH: EGARCH

Modelo exponencial GARCH (EGARCH) (Nelson, 1991)

Características:

1. Modela el $\log(\sigma_t^2)$. Ello asegura que σ_t^2 sea positiva porque incluso con un número negativo en el lado derecho, el antilog lo hace positivo

2. Permite efectos asimétricos

3. Problema: es necesario asegurarse que todos los valores sean positivos

7. EGARCH:

(1) $$\log\left(\sigma_t^2\right) = w + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \log\left(\sigma_{t-j}^2\right) + \sum_{i=1}^{\rho} \alpha_i \left(\frac{abs(e_{t-i})}{\sigma_{t-i}}\right) + \sum_{k=1}^{\gamma} \gamma_k \left(\frac{e_{t-k}}{\sigma_{t-k}}\right)$$

Leverage effect?: $\gamma_i \langle 0$

El impacto es asimétrico si $\gamma_i \neq 0$

EXTENCIONES DEL GARCH: EGARCH

- EGARCH utiliza errores normalmente distribuidos (e_t) y GED y logs que garantiza resultado positivo
- El dividir a los errores por e_t por la desviación estándar condicional (σ_t) se obtienen los shocks estandarizados
- El otro término se obtiene de incluir el valor absoluto de los shocks estandarizados
- Esta especificación permite que shocks positivos o negativos tengan efectos diferenciados $\Rightarrow$ Efectos asimétricos

8. FIGARCH

GARCH con cambio estructural:

(1)

$$h_t = w_1 D_1 + \ldots + w_{R+1} D_{R+!} + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

9. Components GARCH : CGARCH:

(1)

$$v_t = m_t + u_t$$

m_t = cambios ocasionales de nivel

$$m_t = m_{t-1} + q_t \eta_t \tag{21.2}$$

$$q_t = \begin{cases} 0 \ \text{ con probabilidad } \rho \\ 1 \ \text{ con probabilidad } (1-\rho) \end{cases}$$

MODELOS GENERALES:

(27.3)
$$\left(h_t - m_t\right) = \alpha\left(e_{t-1}^2 - m_{t-1}\right) + \beta\left(h_{t-1} - m_{t-1}\right)$$
$$m_t = w + Pm_{t-1} + \phi\left(e_{t-1}^2 - h_{t-1}\right)$$

m_t = tendencia variable en el tiempo o el componente permanente en volatilidad

9. CGARCH

(9)

$$\sigma_t^2 - m_t = \overline{w} + \alpha\left(e_{t-1}^2 - \overline{w}\right) + \beta\left(\sigma_{t-1}^2 - \overline{w}\right)$$

$$m_t = w + \rho\left(m_{t-1} - w\right) + \phi\left(e_{t-1}^2 - \sigma_{t-1}^2\right)$$

Variables transitorias = Impacto en el C.P. en volatilidad
Variables permanentes = Impacto en el nivel del L.P. de la volatilidad

Efecto asimétrico TARCH
q_t = es la volatilidad de L.P.

10. Quadratic GARCH : QGARCH

(19)

$$h_t = w + \alpha\left(e_{t-1} - \gamma\right)^2 + \beta h_{t-1}$$

10. Regime Switching GARCH : RS-GARCH

(23)

$$h_t s_{t-1} = w s_{t-1} + \alpha s_{t-1} e_{t-1}^2 + \beta s_{t-1} h_{t-1} s_{t-1}$$

$$s_t = \text{ régimen}$$

11. Asymmetric Dynamic covariance (Abc)

(24.1)

$$\gamma_t = \mu + e_t + me_{t-1}$$

$$e_t \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{h}_t)$$

(24.2)

$$h_{iit} = \theta_{iit}$$

(24.3)

$$h_{ijt} = P_{ijt}\sqrt{h_{iit}}\sqrt{h_{jjt}} + \phi_{ij}\theta_{ijt}$$

MODELOS GENERALES:

$$\theta_{ijt} = w_{ijt} + b_i^{'} H_{t-1} b_j + a_i^{'} e_{t-1} e_{t-1}^{'} + \ldots + g_i^{'} h_{t-1} h_{t-1}^{'} g_j \quad (25)$$

1.VECH: $P_{12} = 0$

2. BEKK

$$P_{12} = 0 \quad \phi_{12} = 1$$

3. FARCH

2. Prueba del signo y el tamaño del sesgo (Engle y Ny, 1993)

2.1. <u>Prueba del sesgo del signo</u>

1. Definir a s_t^- como una dummy que toma el valor de 1

Si $\hat{u}_{t-1} < 0$ y 0 en otro caso

$$H_0\colon \phi = 0$$

(26) $e_t^2 = \phi_0 + \phi_1 s_{t-1}^- + v_t$

2.2. Prueba del sesgo del tamaño:

1. Definir una variable dummy dependiente

(27) $$e_t^2 = \phi_0 + \phi_1 s_{t-1}^{-} + v_t$$

PRUEBAS DE ASIMETRIA

3. Prueba simultanea del signo y el tamaño del sesgo

Definiendo: $s_{t-1}^{+} = 1 - s_{t-1}^{-}$

(28) $$e_t^2 = \phi_0 + \phi_1 s_{t-1}^{-} + \phi_2 s_{t-1}^{-} e_{t-1} + \phi_3 s_{t-1}^{+} e_{t-1} + v_t$$

H_0: $\phi_1 = 0$ $\Rightarrow$ "Sign bias" (importa el signo)

H_0: $\phi_2 = \phi_3 = 0$ $\Rightarrow$ "Size bias" (importa la magnitud)

Prueba conjunta: TR^2 de (21.3) con $\chi^2(3)$:

H_0: No existen efectos asimétricos

11. Objetivo: Cuantificar las relaciones entre la volatilidad de varias variables

$\Rightarrow$ Modelo GARCH multivariado

$$y_t = (y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{Nt})$$

La varianza condicional: H_t tiene las varianzas en la diagonal

GARCH MULTIVARIADOS

Modelo VECH:

$$(29) \qquad vec^{h}(H_t) = vec^{h}(A_0) + \sum^{q} A_i vec^{h}\left(e_{t-i} e^{1}_{t-i}\right) + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i vec^{h}\left(H_{t-i}\right)$$

Donde:

$e_t = \left(e_{1t}, e_{2t}, \ldots, e_{nt}\right)$ son los términos de error asociados a las medias condicionales de $y_{1t}, y_{2t}, \ldots, y_{Nt}$

Representación matricial: N = 2 (dos variables)

$$(30) \quad \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{0} \\ a_{12}^{0} \\ a_{22}^{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-1}^{2} \\ e_{1t-1}^{*} e_{2t-1} \\ e_{2t-1}^{2} \end{bmatrix}$$

H_{11t} = varianza condicional asociada con y_{1t}

H_{12t} = covarianza condicional entre los errores

H_{22t} = varianza condicional con y_{2t}

Representación diagonal (reduce el número de parámetros):

$$(31)\quad \begin{bmatrix} h_{11t} \\ h_{12t} \\ h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{0} \\ a_{12}^{0} \\ a_{22}^{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-1}^{2} \\ e_{1t-1}e_{2t-1} \\ e_{2t-1}^{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11t-1} \\ h_{12t-1} \\ h_{22t-1} \end{bmatrix}$$

Representación BEKK: (asegura una matriz definida positiva)

(32) $$H_t = A_0 + \sum_{i=1}^{q} A_i^{*} e_{t-i} e_{t-i}^{1} A_i^{*1} + \sum_{i=1}^{\rho} \beta_i^{*} H_{t-i} \beta_i^{*i}$$

$$\begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{0} & a_{12}^{0} \\ a_{21}^{0} & a_{22}^{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^{*} & a_{12}^{*} \\ a_{21}^{*} & a_{22}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1t-1}^{2} & e_{1t-1} e_{2t-1} \\ e_{1t-1} e_{2t-1} & e_{2t-1}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{*} & a_{12}^{*} \\ a_{21}^{*} & a_{22}^{*} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} b_{11}^{*} & b_{12}^{*} \\ b_{21}^{*} & b_{22}^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11t-1} & h_{12t-1} \\ h_{21t-1} & h_{22t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}^{*} & b_{12}^{*} \\ b_{21}^{*} & b_{22}^{*} \end{bmatrix}$$

CONSIDERACIONES GENERALES

1. Modelos ARCH suponen que los shocks positivos y negativos tienen el mismo efecto por que dependen del cuadrado de los shocks pasados
2. El modelo ARCH es bastante restrictivo
3. El modelo ARCH no explica las fuentes de variación
4. EL modelo ARCH tiende a sobrepredecir la volatilidad porque responde lentamente a shocks aislados fuertes

EXTENCIONES DE LOS MODELOS ARCH Y GARCH

Dr. Luis Miguel Galindo