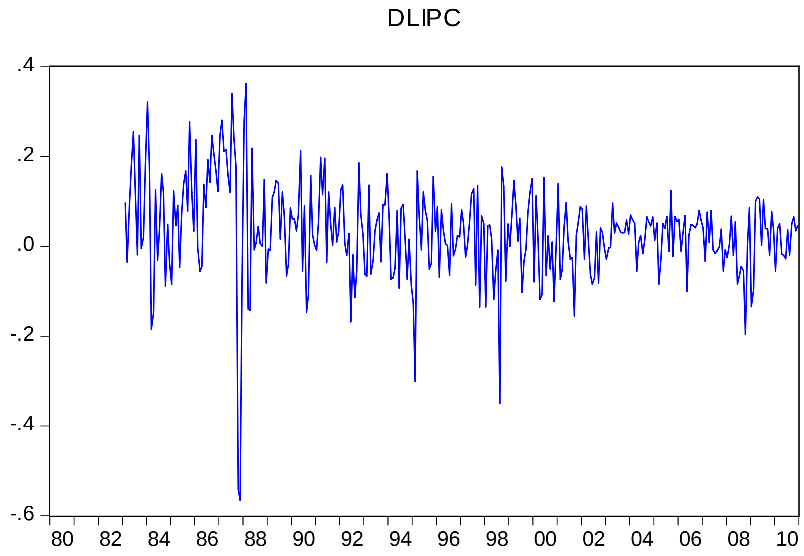
Especificación y Estimación de los MODELOS ARCH

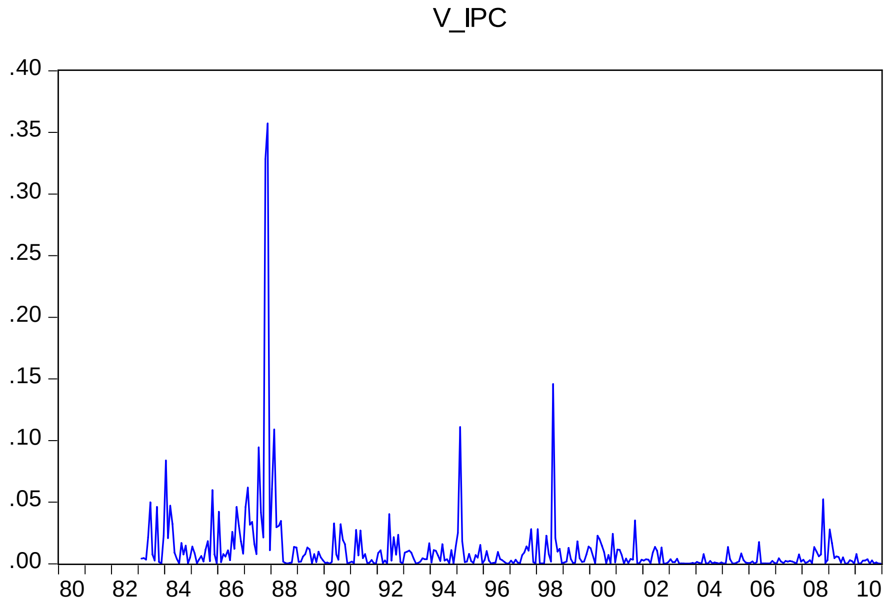
Horacio Catalán Alonso

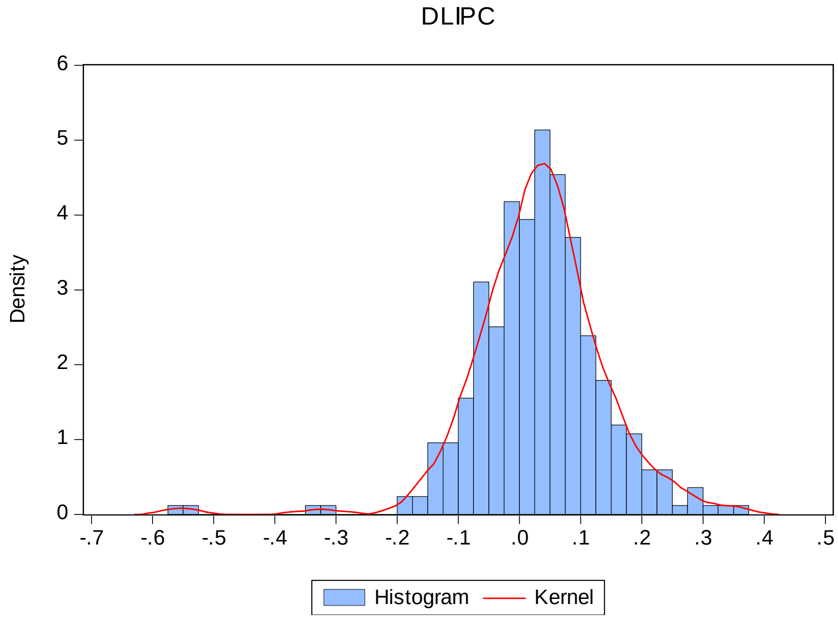
Noviembre de 2011

Características de las series financieras:

1. Son <u>leptokurticas</u> (achatadas y con colas más gordas)
2. Las relaciones entre ganancia y riesgo no son lineales
3. La volatilidad aparece en clusters
4. Leverage effect: la volatilidad es mayor con una caída de la variable







Bolsa Mexicana de Valores IPC

ESPECIFICACIÓN
DEL
MODELO ARCH(M)

El modelos ARCH(m) asume que la varianza depende de las noticias pasadas ó de los shocks pasados

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_m \varepsilon_{t-m}^2$$

$$\varepsilon_t \to N(0, h_t) \qquad \varepsilon_t = \sqrt{h_t}\, v_t \qquad v_t \sim \mathrm{iidN}(0,1)$$

ARCH $\Rightarrow$ parece más un MA ya que la varianza condicional es un MA de los residuales al cuadrado

La especificación genera dos implicaciones:

a) La varianza debe ser positiva y finita

b) El método de estimación, debido a que la media y varianza de la serie deben estimarse de manera simultánea

Debe cumplirse

1) $\alpha_0 > 0 \quad \alpha_j \geq 0$

Varianza positiva

2) $\alpha_i > \alpha_j$ Para $i > j$

las noticias más recientes tienen un mayor impacto

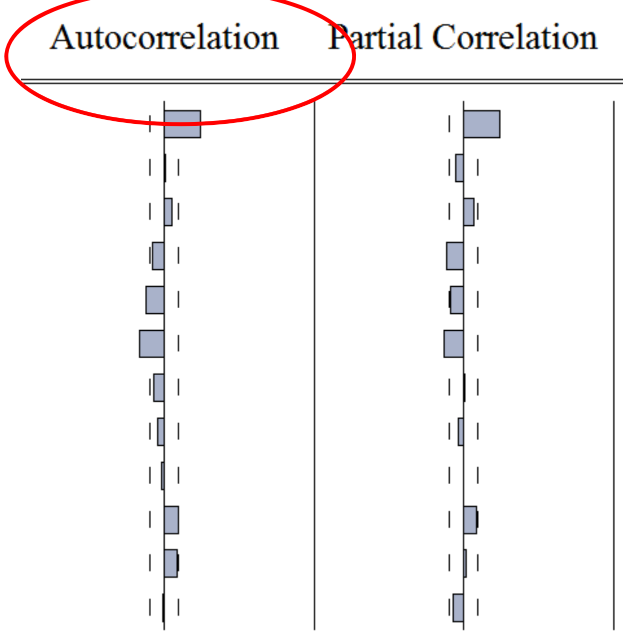
Especificación de los modelos ARCH

1) Estimar la media condicional del la series de los rendimientos

Usualmente se estima un modelo ARMA(p,q) de series de tiempo, en algunos casos simples solo se utiliza la constante

Modelo para DLPOIL

Criterio	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)	AR(5)	AR(6)
Akaike info criterion	-2.072165	-2.066857	-2.063485	-2.068667	-2.067302	-2.078126*
Schwarz criterion	-2.05101*	-2.035062	-2.021006	-2.01546	-2.003325	-2.003334
Hannan-Quinn criter	-2.063763*	-2.054227	-2.046608	-2.047526	-2.041879	-2.048403



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.253	0.253	23.968	0.000
2	0.014	-0.053	24.043	0.000
3	0.054	0.069	25.159	0.000
4	-0.076	-0.115	27.314	0.000
5	-0.128	-0.082	33.541	0.000
6	-0.170	-0.137	44.557	0.000
7	-0.068	0.015	46.327	0.000
8	-0.044	-0.039	47.081	0.000
9	-0.023	0.001	47.282	0.000
10	0.103	0.086	51.328	0.000
11	0.090	0.019	54.421	0.000
12	-0.014	-0.068	54.492	0.000

Dos criterios indican que es un modelo AR(1)

Dependent Variable: DLPOIL

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002447	0.005964	0.410315	0.6818
AR(1)	0.253545	0.050452	5.025489	0.0000

R-squared	0.064222	Mean dependent var	0.002349
Adjusted R-squared	0.061679	S.D. dependent var	0.088400
S.E. of regression	0.085630	Akaike info criterion	-2.072165
Sum squared resid	2.698375	Schwarz criterion	-2.051011
Log likelihood	385.3506	Hannan-Quinn criter.	-2.063763
F-statistic	25.25553	Durbin-Watson stat	1.971647
Prob(F-statistic)	0.000001		

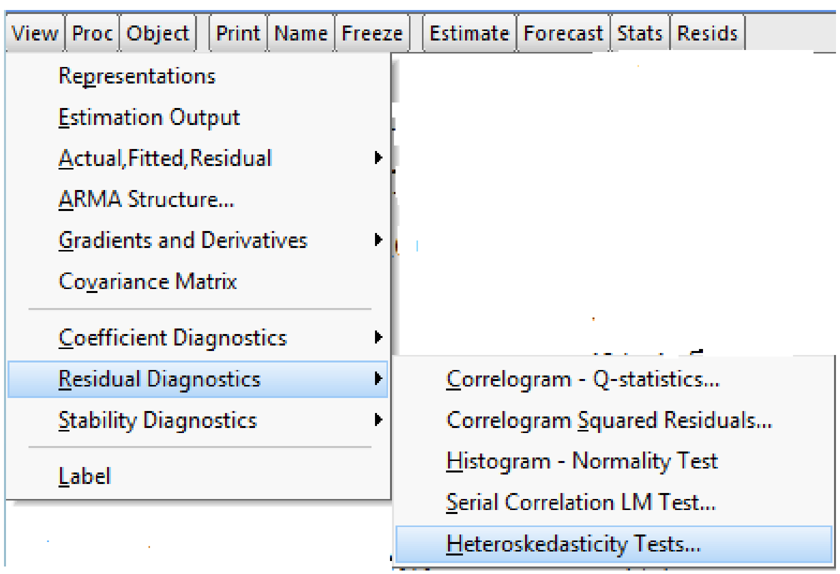
Inverted AR Roots	.25

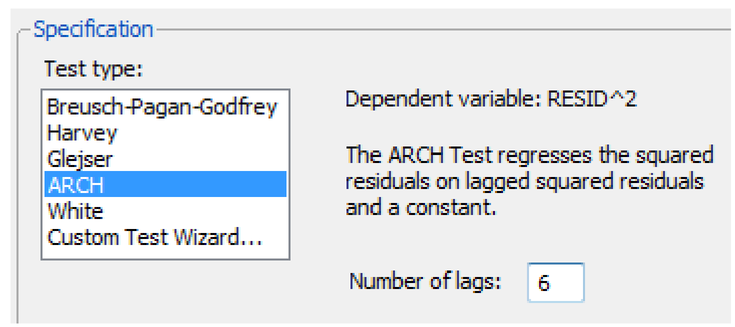
2) Identificar el efecto ARCH en el modelo

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_k \hat{u}_{t-k}^2 + e_t$$

$$H_0 : \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_k = 0$$

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \cdots, \alpha_k \neq 0$$





Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	3.896504	Prob. F(6,357)	0.0009
Obs*R-squared	22.37233	Prob. Chi-Square(6)	0.0010

3) Identificar el ORDEN del modelo ARCH

Correlograma sobre los residuales al cuadrado

Orden del ARCH

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.203	0.203	15.332	
		2	0.097	0.058	18.859	0.000
		3	0.057	0.028	20.084	0.000
		4	0.044	0.024	20.818	0.000
		5	0.135	0.122	27.668	0.000
		6	0.096	0.046	31.139	0.000
		7	0.069	0.026	32.938	0.000
		8	0.008	-0.029	32.961	0.000
		9	-0.045	-0.060	33.743	0.000
		10	0.025	0.028	33.987	0.000
		11	-0.045	-0.068	34.748	0.000
		12	-0.053	-0.051	35.816	0.000

Criterio	**ARCH(1)**	**ARCH(2)**	**ARCH(3)**	**ARCH(4)**
Akaike info criterion	-2.205135	-2.211932	**-2.218494***	-2.216438
Schwarz criterion	-2.162827*	-2.159046	-2.155032	-2.142398
Hannan-Quinn criter	-2.18833	-2.190925	**-2.193286***	-2.187028

DPOIL cambios en los precios del petróleo

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	-0.000775	0.004222	-0.183473	0.8544
AR(1)	0.204001	0.055465	3.678014	0.0002
		Variance Equation		
C	0.002229	0.000443	5.028298	0.0000
RESID(-1)^2	0.406690	0.080576	5.047299	0.0000
RESID(-2)^2	0.313029	0.102691	3.048260	0.0023
RESID(-3)^2	0.121816	0.063836	1.908246	0.0564

Modelo ARCH(3):

Los coeficientes son positivos

ARCH(3) < ARCH(2) < ARCH(1)

El coeficiente de la constante es positivo

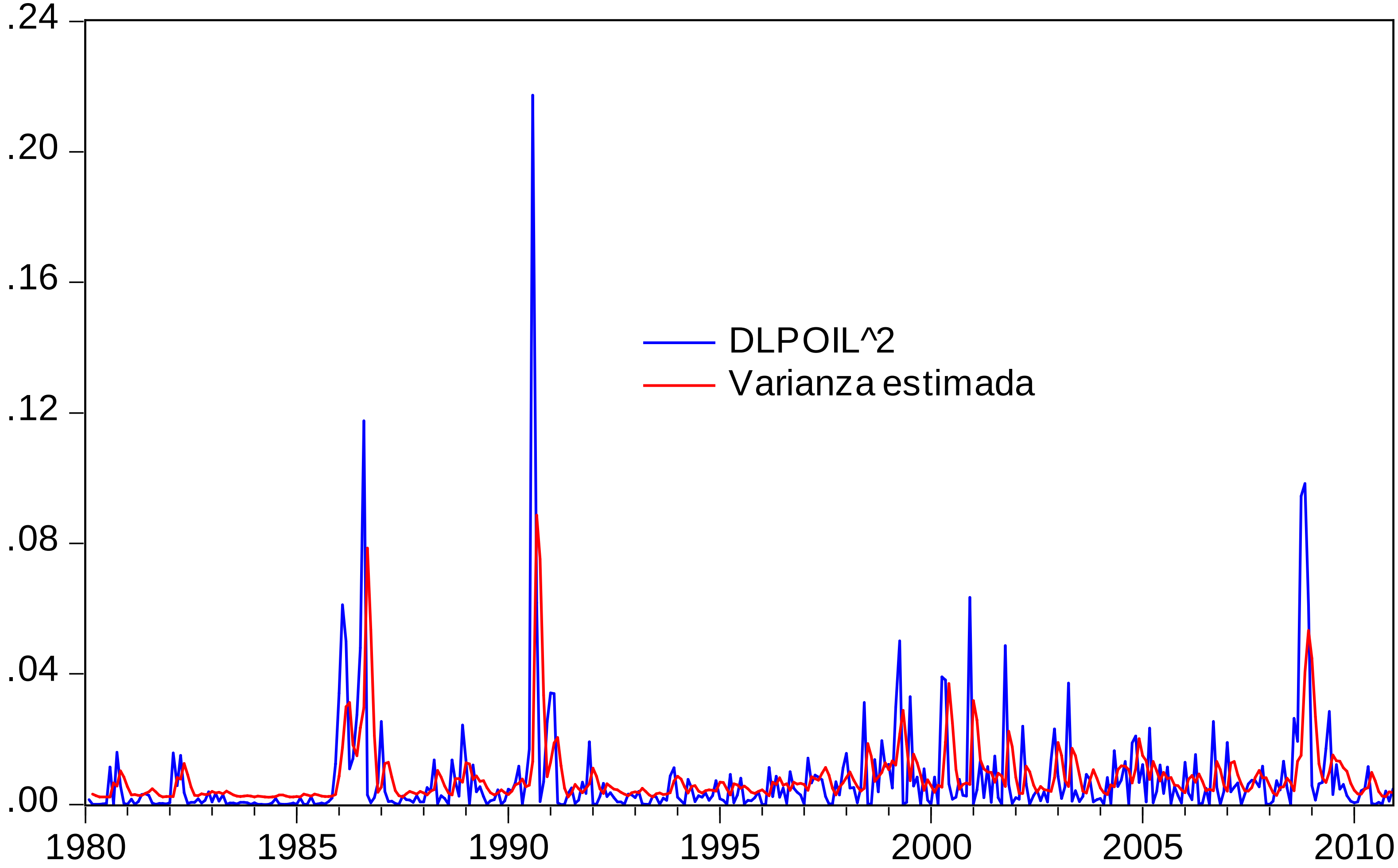
El proceso ARCH debe ser estacionario esto se garantiza cuando

$$0 \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leq 1$$

RESID(-1)^2	0.406690
RESID(-2)^2	0.313029
RESID(-3)^2	0.121816
Suma	0.841535

En este ejemplo el modelo ARCH es un proceso estacionario es decir la varianza no crece indefinidamente

Varianza observada y estimada



Debilidades del modelo ARCH(m)

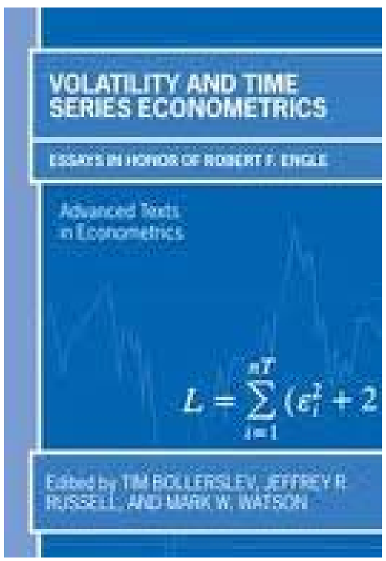
•Las restricciones en los parámetros es más difícil que se cumplen cuando aumenta el orden del ARCH

•La varianza solo se explica por las noticias no aporta más información sobre la varianza de los rendimientos

•Tiende a sobre estimar la varianza de la serie

•No distingue entre choques positivos o negativos

ESPECIFICACIÓN
DEL
MODELO GARCH



Tim Bollerslev

- Forward looking behaviour, requiere pronosticar adecuadamente la volatilidad y el riesgo de un activo

- La volatilidad no es una serie observable en el momento t, se requieren datos históricos para estimar la volatilidad

- Volatilidad histórica se estima con la varianza del rendimiento simple (cambio en el precio del activo)

Una opción: Exponantially Weigted Moving Average Models (EWMA) que es una extensión del promedio histórico pero haciendo que las observaciones más recientes tengan un mayor peso

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^{j-1}R_{t-1-j}^2$$

$$R_{t-1-j}^2 = \text{varianza de los rendimeintos}$$

$$\lambda = \text{"decay factor"}\left(\text{Riskmetrics}: 0.94\right)$$

La forma más sencilla es definida como:

$$\sigma_{t+1}^{2} = \lambda\sigma_{t}^{2} + \left(1 - \lambda\right)R_{t}^{2}$$

Implica que la varianza del periodo siguiente como un promedio ponderado de la varianza actual y el rendimiento actual al cuadrado

Se asume un patrón sistemático en la evolución de la varianza

Una generalización del modelo ARCH(m) fue desarrollada por Bollerslev (1986) al proponer que la varianza condicional dependa de sus propios rezagos

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-i}$$

$$\varepsilon_t \to N(0, h_t) \qquad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} v_t \qquad v_t \sim \mathrm{iidN}(0,1)$$

La especificación GARCH se define como un modelo ARCH de orden infinito (Bollerslev, 1986)

Especificación de los modelos GARCH(m,p)

1) Estimar la media condicional de la series de los rendimientos

2) Identificar el efecto ARCH

3) Identificar el orden del modelo GARCH(m,p)

Varianza rezagada

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-i}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Noticias o shocks

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.351	0.351	41.560	
		2	0.092	-0.036	44.425	0.000
		3	0.304	0.323	75.671	0.000
		4	0.208	-0.007	90.333	0.000
		5	0.074	0.019	92.201	0.000
		6	0.081	-0.024	94.459	0.000
		7	0.122	0.057	99.568	0.000
		8	0.052	-0.033	100.49	0.000
		9	0.061	0.060	101.78	0.000
		10	0.033	-0.063	102.16	0.000
		11	0.003	0.004	102.16	0.000
		12	0.026	-0.004	102.40	0.000

Ejemplo para DLIPC

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.023426	0.004851	4.828773	0.0000
AR(1)	0.093601	0.057998	1.613862	0.1066
Variance Equation				
C	0.000296	0.000177	1.669536	0.0950
RESID(-1)^2	0.221130	0.056141	3.938830	0.0001
GARCH(-1)	0.765764	0.051596	14.84166	0.0000

$$h_t = 0.000296 + 0.221\varepsilon_{t-1}^2 + 0.765h_{t-1}$$

Modelo GARCH(1,1)

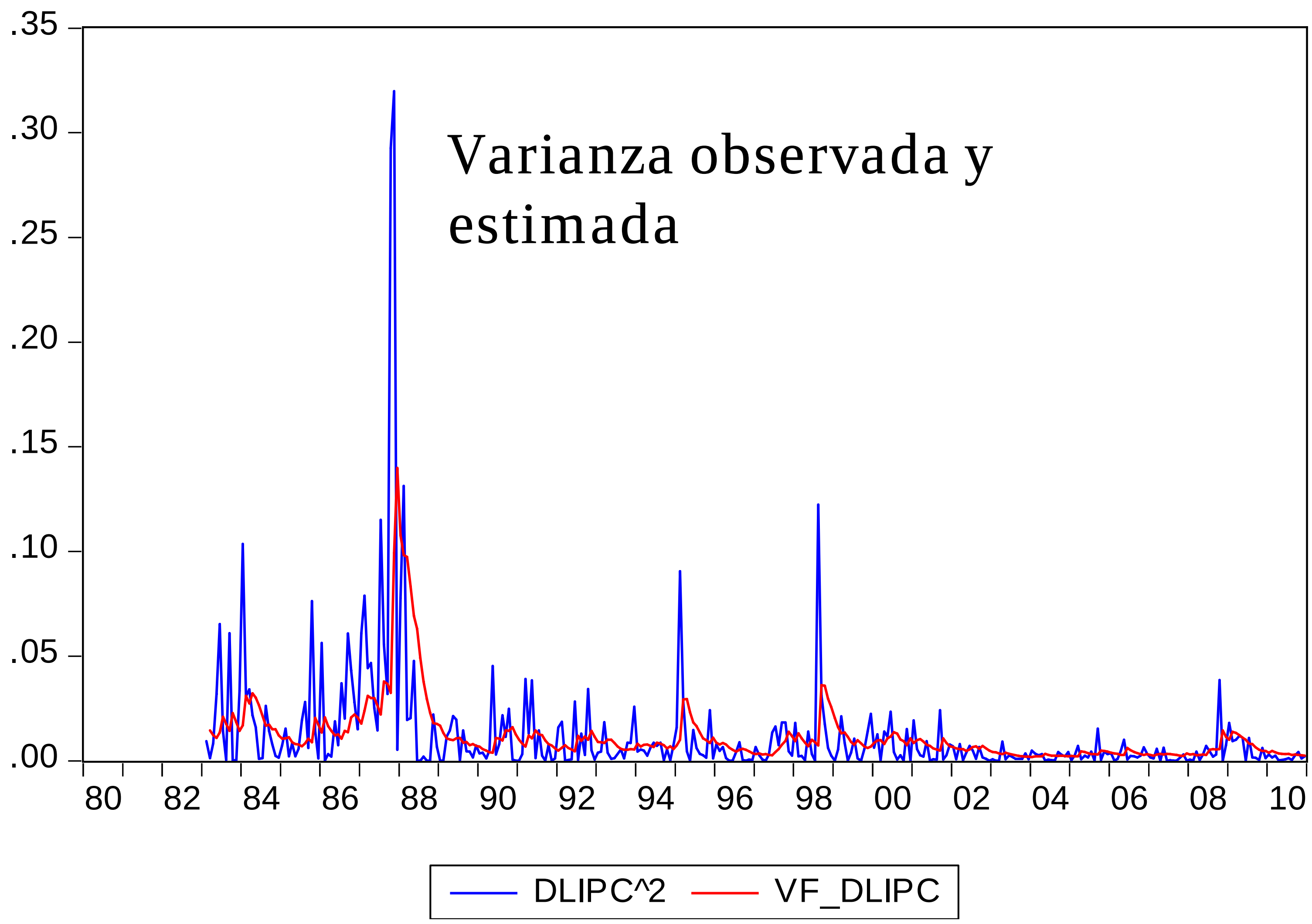
Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	-0.024	-0.024	0.1958	
		2	-0.044	-0.045	0.8515	0.356
		3	0.070	0.068	2.5069	0.286
		4	0.004	0.005	2.5112	0.473
		5	-0.087	-0.082	5.1127	0.276
		6	-0.053	-0.062	6.0771	0.299
		7	0.037	0.028	6.5514	0.364
		8	-0.036	-0.028	6.9969	0.429
		9	-0.007	0.002	7.0136	0.535
		10	0.011	-0.003	7.0583	0.631
		11	0.022	0.017	7.2261	0.704
		12	0.012	0.016	7.2804	0.776

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	0.979477	Prob. F(6,321)	0.4391
Obs*R-squared	5.897057	Prob. Chi-Square(6)	0.4348

Criterios	GARCH(1,1)	GARCH(2,1)	GARCH(1,2)	GARCH(2,2)
Akaike info criterion	***-1.953648****	-1.950757	-1.951604	-1.946014
Schwarz criterion	***-1.896595****	-1.882294	-1.883141	-1.86614
Hannan-Quinn criter.	***-1.9309****	-1.92346	-1.924307	-1.914167

(Bollersle, 1986) demuestra que un modelo GARCH(1,1), tiene las propiedades estadísticas satisfactorias para capturar la volatilidad en los datos



Varianza observada y estimada
.35
.30
.25
.20
.15
.10
.05
.00
80
82
84
86
88
90
92
94
96
98
00
02
04
06
08
10
DLIPC^2
VF_DLIPC

Restricciones en el modelo GARCH

$$\alpha_0 > 0$$
$$\alpha_i \geq 0$$
$$\beta_j \geq 0$$

los modelos GARH requiere que la varianza condicional sea no negativa

$$\sum_{i}^{\max(m,p)} (\alpha_i + \beta_i) < 1$$

La varianza no crece al infinito describe un proceso estacionario

C	0.000296	0.000177	1.669536	0.0950
RESID(-1)^2	0.221130	0.056141	3.938830	0.0001
GARCH(-1)	0.765764	0.051596	14.84166	0.0000

$$h_t = 0.000296 + 0.221\varepsilon_{t-1}^2 + 0.765h_{t-1}$$

$\alpha_0 = 0.000296$

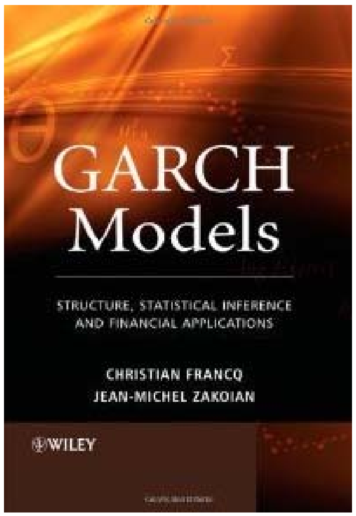
$\alpha_1 = 0.221$ El shock de las noticias

$\beta_1 = 0.765$ Volatilidad de un periodo anterior

$$\alpha_1 + \beta_1 = 0.986894$$

El modelo GARCH es estacionario

EXTENSIONES DE LOS MODELO GARCH



Modelo GARCH-M, ejemplo DLIPC

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
GARCH	1.863806	0.589412	3.162142	0.0016
AR(1)	0.135453	0.059804	2.264936	0.0235
		Variance Equation		
C	0.000421	0.000333	1.264451	0.2061
RESID(-1)^2	0.195389	0.061464	3.178939	0.0015
GARCH(-1)	0.689702	0.073861	9.337797	0.0000
DLIDJ^2	0.342618	0.113758	3.011806	0.0026

Variable en la ecuación de la varianza

Modelo exponencial GARCH (EGARCH) (Nelson, 1991)

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \left[\frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right] + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i^* \left[\left| \frac{e_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right| - \mu \right] + \sum_{j=1}^{\rho} \beta_j \ln(h_{t-j})$$

LOG(GARCH) = C(3) + C(4)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(5)*ABS(RESID(-2)/@SQRT(GARCH(-2))) + C(6)*ABS(RESID(-3)/@SQRT(GARCH(-3)))

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.002925	0.004378	0.668225	0.5040
AR(1)	0.253853	0.054598	4.649506	0.0000
		Variance Equation		
C(3)	-6.266212	0.192796	-32.50179	0.0000
C(4)	0.604108	0.104879	5.760023	0.0000
C(5)	0.669242	0.110166	6.074836	0.0000
C(6)	0.216108	0.110840	1.949735	0.0512

Coef. positivos

TGARCH (Threshold GARCH)

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j} + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k \varepsilon_{t-k}^2 \Gamma_{t-k}$$

Donde $\Gamma_{t-1} = 1$ si $\varepsilon_t < 0$

$\Gamma_{t-1} = 0$ en otro caso

Dependent Variable: DLESP

GARCH = C(2) + C(3)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(4)*GARCH(-1)

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.007596	0.003889	1.953015	0.0508
		Variance Equation		
C	0.001079	0.000501	2.152575	0.0314
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.213303	0.097770	2.181694	0.0291
GARCH(-1)	0.540660	0.188067	2.874833	0.0040

Especificación y Estimación de los MODELOS ARCH

Horacio Catalán Alonso

Noviembre de 2011